

Développement du binôme de Newton

Exercices

1. Développer les expressions suivantes:

(a) $(x + y)^7$

(b) $(x - y)^7$

(c) $(a + 1)^6$

(d) $(a - 2)^5$

(e) $(2x + 3)^5$

(f) $(2x - 3)^5$

(g) $(3a + 2b)^4$

(h) $(3a - 2b)^6$

2. Quel est le coefficient de

(a) x^6y^2 dans $(x + y)^8$?

(b) x^3y^7 dans $(x - y)^{10}$?

(c) x^6y^7 dans $(2x + y)^{13}$?

Solutions

1.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad (x + y)^7 &= \sum_{p=0}^7 C_7^p x^{7-p} y^p \\ &= x^7 + 7x^6y + 21x^5y^2 + 35x^4y^3 + 35x^3y^4 + 21x^2y^5 + 7xy^6 + y^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad (x - y)^7 &= \sum_{p=0}^7 C_7^p x^{7-p} (-y)^p \\ &= x^7 + 7x^6(-y) + 21x^5(-y)^2 + 35x^4(-y)^3 + 35x^3(-y)^4 + 21x^2(-y)^5 + \\ &\quad 7x(-y)^6 + (-y)^7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(c)} \quad (a+1)^6 &= \sum_{p=0}^6 C_6^p a^{6-p} 1^p = \sum_{p=0}^6 C_6^p a^{6-p} \\
&= a^6 + 6a^5 + 15a^4 + 20a^3 + 15a^2 + 6a + 1 \\
\text{(d)} \quad (a-2)^5 &= \sum_{p=0}^5 C_5^p a^{5-p} (-2)^p \\
&= a^5 + 5a^4(-2) + 10a^3(-2)^2 + 10a^2(-2)^3 + 5a(-2)^4 + (-2)^5 \\
&= a^5 - 10a^4 + 40a^3 - 80a^2 + 80a - 32 \\
\text{(e)} \quad (2x+3)^5 &= \sum_{p=0}^5 C_5^p (2x)^{5-p} 3^p \\
&= (2x)^5 + 5(2x)^4 3 + 10(2x)^3 3^2 + 10(2x)^2 3^3 + 5(2x) 3^4 + 3^5 \\
&= 32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243 \\
\text{(f)} \quad (2x-3)^5 &= \sum_{p=0}^5 C_5^p (2x)^{5-p} (-3)^p \\
&= 32x^5 - 240x^4 + 720x^3 - 1080x^2 + 810x - 243 \\
\text{(g)} \quad (3a+2b)^4 &= \sum_{p=0}^4 C_4^p (3a)^{4-p} (2b)^p \\
&= (3a)^4 + 4(3a)^3 2b + 6(3a)^2 (2b)^2 + 4(3a)(2b)^3 + (2b)^4 \\
&= 81a^4 + 216a^3b + 216a^2b^2 + 96ab^3 + 16b^4 \\
\text{(h)} \quad (3a-2b)^6 &= \sum_{p=0}^6 C_6^p (3a)^{6-p} (-2b)^p \\
&= (3a)^6 + 6(3a)^5(-2b) + 15(3a)^4(-2b)^2 + 20(3a)^3(-2b)^3 + 15(3a)^2(-2b)^4 + \\
&\quad 6(3a)(-2b)^5 + (-2b)^6 \\
&= 729a^6 - 2916a^5b + 4860a^4b^2 - 4320a^3b^3 + 2160a^2b^4 - 576ab^5 + 64b^6
\end{aligned}$$

2.

$$\text{(a)} \quad (x+y)^8 = \sum_{p=0}^8 C_8^p x^{8-p} y^p$$

Le coefficient de x^6y^2 vaut $C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

$$\text{(b)} \quad (x-y)^{10} = \sum_{p=0}^{10} C_{10}^p x^{10-p} (-y)^p$$

Le coefficient de x^3y^7 vaut $C_{10}^7 (-1)^7 = -\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = -120$

$$\text{(c)} \quad (2x+y)^{13} = \sum_{p=0}^{13} C_{13}^p (2x)^{13-p} y^p$$

Le coefficient de x^6y^7 vaut $C_{13}^7 2^6 = 2^6 \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}$
 $= 64 \cdot 1716 = 109824$

(Saisie et mise en pages: Christophe THEIS, Iere B, LCD)