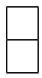
Dénombrement

Exercices

1. Un groupe de dix personnes comprend cinq hommes et cinq femmes.
    (a) Combien y a-t-il de manières de les disposer autour d'une table ronde, en ne tenant compte que de leurs positions relatives?
    (b) Même question si l'on veut respecter l'alternance homme-femme?

2. Un caractère de l'écriture Braille, destinée aux aveugles, est formé de points obtenus en piquant la feuille de papier à travers au moins un des six trous de la grille ci-dessous.



    (a) Combien de caractères Braille peut-on ainsi former?
    (b) Combien de caractères Braille sont-ils formés de quatre points?

3. Au cours d'un sommet européen, on désire installer autour d'une table ronde les 12 chefs d'Etats ou de gouvernements des pays de la C.E.E. Combien y a-t-il de plans de tables si
    (a) l'on ne tient compte que de leur position les uns par rapport aux autres?
    (b) l'on tient compte de leur position par rapport à la table?

4. Combien de mains de huit cartes choisies dans un jeu de 32 cartes contiennent:
    (a) exactement un roi?
    (b) exactement une dame?
    (c) exactement deux dames?

(d) exactement deux coeurs?
(e) aucune dame?
(f) au moins une dame?
(g) exactement une dame et un coeur?

5. Dans une urne, on dépose huit boules blanches, six boules noires et quatre boules rouges. On tire simultanément trois boules de l'urne. Combien y a-t-il de manières de tirer:

   (a) aucune boule noire?
   (b) exactement une boule noire?
   (c) exactement deux boules noires?
   (d) 3 boules noires?
   (e) 3 boules quelconques? Que remarque-t-on?
   (f) 3 boules de couleurs différentes deux à deux?

6. Combien peut-on former de tiercés différents dans une course de 18 chevaux

   (a) dans l'ordre?
   (b) dans le désordre?
   (c) mêmes questions avec les quartés?
   (d) mêmes questions avec les quintés?

7. On considère un jeu de 32 cartes.

   (a) Combien y a-t-il de mains de 8 cartes?
   (b) Combien y a-t-il de mains de 8 cartes contenant
       - un valet exactement?
       - trois coeurs exactement?
       - un valet et trois coeurs exactement?

8. A l'entrée d'un immeuble, on dispose d'un clavier de douze touches: trois lettres A, B, et C, et les neuf chiffres autres que 0. Le code déclenchant l'ouverture de la porte peut être changé par le régisseur. Ce code est toujours composé d'une lettre suivie d'un nombre de trois chiffres.

(a) Dans cette question, les trois chiffres ne sont pas nécessairement distincts.

   - Combien de codes commençants par la lettre A le régisseur peut-il proposer?
   - Combien de codes peut-il proposer?

(b) Dans cette question, la lettre du code est B et les trois chiffres sont tous distincts

   - Combien de codes le régisseur peut-il proposer?
   - Combien de codes comportant au moins un des chiffres 7, 8 ou 9 peut-il proposer?

9. Dans une classe de trente-cinq élèves, on procède à l'élection du délégué. Il y a quatre candidats: Alain, Brigitte, Charles et Dorothée. Un résultat possible est: cinq voix pour Alain, dix voix pour Brigitte, sept voix pour Charles, huit voix pour Dorothée, quatre bulletins blancs et un bulletin nul.

   Combien y a-t-il de résultats possibles?

Solutions

1. (a) Une manière de disposition est différente d'une autre si une personne au moins a au moins un autre voisin.

   La place prise par la première personne est donc négligeable, puisqu'il s'agit de dénombrer les positions relatives dès que la première personne a pris place.

   La 2^e a 9 choix.

   La 3^e a 8 choix, etc.

   Donc, il y a $9! = 362880$ manières différentes.

   (b) Supposons que la première personne qui prend place est un homme. Les autres 4 hommes ont donc $4! = 24$ manières de se placer.

   Les 5 femmes qui restent ont $5! = 120$ manières de se placer.

   Donc, il y a en tout $4!5! = 2880$ manières différentes,

2. (a) Chaque trou peut ou non être occupé: $2^6 = 64$ possibilités.

   Caractères de Braille : $64 - \underbrace{1}_{\text{aucun trou}} = 63$.

   (b) Il s'agit de choisir la place des 2 trous parmi 6 places, resp. des 4 places occupées.

   $C_6^2 = C_6^4 = \dfrac{6!}{4!2!} = 15$

3. (a) (cf exercice 1a) $11! = 39916800$

   (b) Par rapport à la table, le premier a également 12 possibilités: $12 \cdot 11! = 479001600$.

4.

(a) $$\underset{\substack{\nearrow \\ \text{1 roi} \\ \text{parmi 4}}}{C_4^1} \cdot \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{les 7 cartes restantes} \\ \text{parmi les 24 non coeurs}}}{C_{28}^7} = 4 \cdot \frac{28!}{7!21!} = 4736160$$

(b) 4736160 (cf a)

(c) $$\underset{\substack{\nearrow \\ \text{2 dames} \\ \text{parmi 4}}}{C_4^2} \cdot \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{6 cartes restantes} \\ \text{parmi les 28 non dames}}}{C_{28}^6} = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{28!}{6!22!} = 2260440$$

(d) $$\underset{\substack{\nearrow \\ \text{2 coeurs} \\ \text{parmi les 8}}}{C_8^2} \cdot \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{6 cartes restantes} \\ \text{parmi les 24 non coeur}}}{C_{24}^6} = \frac{8!}{2!6!} \cdot \frac{24!}{6!18!} = 3768688$$

(e) $C_{28}^8 = \dfrac{28!}{8!20!} = 3108105$

(f) $$\underset{\substack{\nearrow \\ \text{toutes les mains} \\ \text{possibles}}}{C_{32}^8} - \underset{\substack{\nwarrow \\ \text{mains sans} \\ \text{dames}}}{C_{28}^8} = 10518300 - 3108105 = 740195$$

ou:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{1 dame}}}{C_4^1 C_{28}^7} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{2 dames}}}{C_4^2 C_{28}^6} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{3 dames}}}{C_4^3 C_{28}^5} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{4 dames}}}{C_4^4 C_{28}^4}$$

$= 4736160 + 2260440 + 393120 + 20475$

$= 7410195$

(g) $$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{la dame} \\ \text{sans coeur}}}{C_1^1} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{les 7 cartes restantes} \\ \text{parmi les 21 non coeurs et non dames}}}{C_{21}^7} \quad +$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{1 dame} \\ \text{non coeur}}}{C_3^1} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1 coeur} \\ \text{non dame}}}{C_7^1} \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \text{6 cartes restantes} \\ \text{parmi les 21 non dames et non coeurs}}}{C_{21}^6}$$

$= 116280 + 1139544 = 1255824$

5.

(a) $C_{12}^3 = \dfrac{12!}{3!9!} = 220$
$(12 = 8 + 4)$
$\nearrow \qquad \nwarrow$
boules blanches boules rouges

(b) $C_6^1 C_{12}^2 = 396$
$\nearrow \qquad \nwarrow$
boule 2 autres boules
noire non noires

(c) $C_6^2 C_{12}^1 = 15 \cdot 12 = 180$

(d) $C_6^3 = \dfrac{6!}{3!3!} = 20$

(e) $C_{18}^3 = 816$

(f) 3 boules de couleurs différentes deux à deux signifie 3 boules différentes.
$C_6^1 C_8^1 C_4^1 = 6 \cdot 8 \cdot 4 = 192$

6.

(a) $A_{18}^3 = 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4896$

(b) $C_{18}^3 = \dfrac{A_{18}^3}{3!} = 816$

- $A_{18}^4 = 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 73440$
- $C_{18}^4 = 3060$
- $A_{18}^5 = 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 1028160\$$
- $C_{18}^5 = 8568$

7.

(a) Une main de huit cartes est une combinaison de huit cartes prises parmi les trente-deux du jeu.
Le nombre de ces combinaisons est $C_{32}^8 = 10518300$.

- Considérons une main contenant exactement un valet.
  Il y a quatre possibilités pour le valet et les sept autres cartes sont choisies parmi les vingt-huit qui ne sont valets.

Chaque possibilité de choisir un valet est complétée par C_{28}^{7} façons de choisir les sept autres cartes de la main.
Le nombre de mains contenat un valet exactement est donc
$4 \cdot C_{28}^{7} = 4 \cdot \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4736160$

- De même, il y a C_8^3 façons de choisir trois coeurs parmi les huit et C_{24}^5 façons de choisir les cinq cartes parmi celles autres que des coeurs pour compléter la main.
  Le nombre de mains contenant exactement trois coeurs est donc $C_8^3 \cdot C_{24}^5 = 2380224$.
- Soit A l'ensemble des mains contenant le valet de coeur, deux cartes à coeur autres que le valet et enfin cinq cartes choisies parmi les vingt et une qui ne sont ni des coeurs ni des valets.
  Le cardinal de A est $1 \cdot C_7^2 \cdot C_{21}^5 = 427329$.
  Soit B l'ensemble des mains contenant trois coeurs autres que le valet, un valet parmi trois autres que celui de coeur et enfin quatre cartes prises parmi les vingt et une qui ne sont ni des valets ni des coeurs.
  Le cardinal de B est $C_7^3 \cdot C_3^1 \cdot C_{21}^5 = 628425$.
  $A \cup B$ est l'ensemble des mains contenant exactement un valet et trois coeurs. et comme $A \cup B = \emptyset$, $Card\,(A \cup B) = CardA + CardB$.
  Le nombre de telles mains est alors 1055754.

8.

(a)
- La lettre A étant fixée, il y a autant de codes que de 3-listes de chiffres pris parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.
  Nous avons donc un ensemble M de $9^3 = 729$ codes.
- Dans cette question, un code est un élément de $N \times M$, où $N = \{A, B, C\}$
  Le nombre de codes est alors $Card\ N \cdot Card\ M = 3 \cdot 729 = 2187$.
- La lettre B étant fixée, il y a autant de codes que de 3-listes d'éléments tous distincts pris parmi les neuf chiffres.
  Nous avons donc un ensemble O de $A_9^3 = 504$ éléments.
- Notons P l'ensemble des codes de O qui comprennent au moins un chiffre pris parmi 7, 8 ou 9.
  Ce sont les arrangements de trois éléments pris parmi 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
  Le cardinal de $\bar{P}$ est donc $A_6^3 = 120$.
  Par suite, $Card\ P = Card\ O - Card\ \bar{P} = 504 - 120 = 384$.
  En conclusion, il y a 384 codes comportant au moins un des trois chiffres 7, 8 ou 9.

9. Il y a C_{40}^{5} résultats possibles, soit: 685008. (Remarque: $C_{40}^{35} = C_{40}^{5}$)

(Saisie et mise en page : Christophe THEIS, IIe B 4, LCD)