Etude de la fonction

$$f(x) = \frac{(3-x)^3}{2x^2-1}$$

- $x \in domf \Leftrightarrow 2x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow 2x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x^2 \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \ et \ \ x \neq -\frac{\sqrt{2}}{2}$
  $domf \ = \ \mathbb{R}\backslash \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(3-x)^3}{2x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{-x^3}{2x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{-x}{2}\right) = +\infty$
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(3-x)^3}{2x^2-1} = -\infty$
  Donc: G_f n'admet pas d'$A.H.$

- $\forall x \in domf : f(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}}_{} + \underbrace{\frac{-\frac{55}{2}x + \frac{63}{2}}{2x^2-1}}_{\to 0(\ \text{si } x \to \pm\infty)}$
  Donc: G_f admet une $A.O.$: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

- $\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}^-} \frac{(3-x)^3}{2x^2-1} = \frac{\text{''}\left(\frac{63}{2} + \frac{55}{4}\sqrt{2}\right)\text{''} > 0}{0^+} = +\infty$
  $\lim\limits_{x\to-\frac{\sqrt{2}}{2}^+} \frac{(3-x)^3}{2x^2-1} = -\infty$
  Donc: G_f admet une $A.V. : x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- $\lim\limits_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}^-} \frac{(3-x)^3}{(2x^2-1)} = \frac{\text{''}\left(\frac{63}{2} - \frac{55}{4}\sqrt{2}\right)\text{''} > 0}{0^-} = -\infty$

$$\lim_{x \to \frac{\sqrt{2}}{2}^+} \frac{(3-x)^3}{(2x^2-1)} = +\infty$$

Donc: G_f admet une $A.V. : x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- f est dérivable sur $domf : domf\prime = domf$

  $\forall x \in domf' : f\prime(x) = \dfrac{3(3-x)^2 \cdot (-1) \cdot \left(2x^2-1\right) - (3-x)^3 \cdot 4x}{\left(2x^2-1\right)^2} = -\dfrac{(3-x)^2 \left(2x^2+12x-3\right)}{\left(2x^2-1\right)^2}$

  $f\prime(x) = 0 \Leftrightarrow (3-x)^2 \left(2x^2+12x-3\right) = 0$

  $\Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -3 + \frac{1}{2}\sqrt{42} \simeq 0.24$ ou $x = -3 - \frac{1}{2}\sqrt{42} \simeq -6.24$

-

x	$-\infty$		$-3-\frac{\sqrt{42}}{2}$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$-3+\frac{\sqrt{42}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		3		$+\infty$
$-(3-x)^2$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$-$	
$2x^2+12x-3$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\left(2x^2-1\right)^2$		$+$		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
$f\prime(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$\frac{-54+21\sqrt{42}}{8}$ ≈ 10.262 min *local*	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$\frac{-54-21\sqrt{42}}{8}$ ≈ -23.762 max *local*	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$+\infty$

- $f\prime$ est dérivable sur $domf\prime : domf" = domf\prime$

  $\forall x \in domf'' : f''(x) = \dfrac{2(3-x)\left(110x^2-48x+21\right)}{\left(2x^2-1\right)^3}$

  $f"(x) = 0 \Leftrightarrow (3-x)(110x^2-48x+21) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

-

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		3		$+\infty$
$3-x$		$+$				$+$	0	$-$	
$\left(2x^2-1\right)^3$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$		$+$	
$f"(x)$		$+$	$\Vert$		$\Vert$	$+$	0	$-$	
G_f		$\smile$	$\Vert$	$\frown$	$\Vert$	$\smile$	*point d$\prime$ inflexion* : 0	$\frown$	

Rédaction du corrigé, saisie et mise en pages:

Alain KLEIN, IIe C 2 LCD, 2007/08