Etude de la fonction

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$$

- $x \in domf \Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0$
  $\Leftrightarrow x^2 \neq 1$
  $\Leftrightarrow x \neq -1 \; et \;\; x \neq 1$
  $domf \;\; = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x \cdot 3}{x(x - \frac{1}{x})} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x - \frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x} = 0$
  $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x \cdot 3}{x(x - \frac{1}{x})} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x - \frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x} = 0$
  Donc, G_f admet une $A.H.$: $y = 0$.

- $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{3x}{x^2 - 1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$
  $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{3x}{x^2 - 1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$
  Donc, G_f admet une $A.V.$: $x = -1$.

- $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3x}{x^2 - 1} = \frac{3}{0^-} = -\infty$
  $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3x}{x^2 - 1} = \frac{3}{0^+} = +\infty$
  Donc, G_f admet une $A.V.$: $x = 1$.

- f est dérivable sur $domf$: $domf' = domf$
  $\forall x \in domf'$: $f\prime(x) = \dfrac{3 \cdot (x^2 - 1) - 3x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{3x^2 - 3 - 6x^2}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-3(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$ *impossible*

-

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$-3(x^2+1)$		$-$		$-$		$-$	
$(x^2-1)^2$		$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
$f\prime(x)$		$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	$-\infty$

- f' est dérivable sur $domf'$: $domf" = domf'$

  $\forall x \in domf''$: $f''(x) = \dfrac{-6x \cdot (x^2-1)^2 + (3x^2+3) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \dfrac{(x^2-1)[-6x \cdot (x^2-1) + 4x \cdot (3x^2+3)}{(x^2-1)^4}$

  $= \dfrac{-6x^3 + 6x + 12x^3 + 12x}{(x^2-1)^3} = \dfrac{6x^3 + 18x}{(x^2-1)^3} = \dfrac{6x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

- $f"(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x^2+3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2 = -3$ impossible

-

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$6x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x^2-1)^3$		$+$	$\|$	$-$		$-$	$\|$	$+$	
$f"(x)$		$-$	$\|$	$+$		$-$	$\|$	$+$	
G_f		$\frown$	$\|$	$\smile$	$point\ d\prime\ inflexion : x = 0$	$\frown$	$\|$	$\smile$	

Rédaction du corrigé, saisie et mise en pages:

Alain KLEIN, IIe C 2 LCD, 2007/08