

# Exercices de logique

1. Contrôler l'exactitude des affirmations suivantes:

- (a) Si  $2 + 3 = 8$ , alors l'or est un liquide.
- (b) Si  $3 + 2 = 7$ , alors  $4 + 4 = 8$ .
- (c) Il est faux que si  $8 + 7 = 15$ , alors  $3 + 3 = 5$ .
- (d) Si  $5 < 3$ , alors  $-3 < -5$
- (e) Si Paris est en France, alors  $2 \cdot 3 = 7$
- (f) Paris se trouve en Angleterre et Londres se trouve en France.
- (g) Paris se trouve en Angleterre ou Rome se trouve en Italie.
- (h) Il est faux que  $1 + 1 = 3$  ou  $2 + 2 = 4$ .
- (i) Si  $3 < -1$ , alors  $4 + 9 = 11$  ou bien  $8 \div 2 = 4$ .

2. Ecrire les négations des phrases suivantes:

- (a) Paul est en bonne santé ou il est sportif.
- (b) Pierre est pauvre et étudiant.
- (c) Nicole est belle et intelligente.

3. Démontrer que quelles que soient les propositions  $p, q, r, s$ , les propositions

$$(p \text{ ou } q) \text{ et } (r \text{ ou } s) \\ (p \text{ et } r) \text{ ou } (p \text{ et } s) \text{ ou } (q \text{ et } r) \text{ ou } (q \text{ et } s)$$

sont équivalentes.

4. Montrer que  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$ .

Trouver ensuite la négation de  $(p \Rightarrow q)$ .

5. Pierre, Léon et Jean bavardent ensemble.

Dans les phrases prononcées par chacun d'eux, il y a une proposition vraie et une proposition fausse.

Pierre : "Je fais mes études au collège Jean Monnet et Jean est à l'école des Nouettes."

Jean : "Je fais mes études au collège Jean Monnet et Pierre est au lycée Savary."

Léon : "Je fais mes études au collège Jean Monnet et Pierre est à l'école des Nouettes."

Ils font leurs études dans des écoles différentes.

Où chacun fait-il ses études?

6. Caroline, élève du lycée Savary, participe au championnat d'Europe de Wave-ski qui se déroule aux Sables d'Olonne.

Sophie, Caroline, Nadine et Isabelle occupent les 4 premières places.

Dans chacune des phrases ci-dessous, une proposition est fausse et l'autre est vraie.

- Sophie 2ème, Isabelle 3ème
- Sophie 1ère, Caroline 2ème
- Nadine 2ème, Isabelle 4ème

Trouver le classement du championnat d'Europe de Wave-ski.

7. Dans les phrases ci-dessous, 3 propositions sont vraies et une est fausse.

- Alain dit: "Je ne suis pas premier et je ne suis pas dernier."
- Bob dit: "Je ne suis pas premier."
- Christian dit: "Je suis premier."
- Denis dit : "Je suis dernier."

Qui était le premier ? Qui a donné une réponse fausse ?

8. Contrôler l'exatitute des affirmations suivantes:

- Si Petit-Nobressart se trouve dans la commune de Ell, alors le chat n'est pas un mammifère.
- La chauve-souris est un oiseau ou les vampires existent, ce qui implique que  $\frac{27 \cdot 81}{90} = 24,3$ .
- Les éléphants savent nager ou bien  $\pi \leq 4$ .
- Il est faux que s'il est possible de lécher son propre coude,  $\frac{250}{143} \geq 1.8$ .
- Le latin était la langue parlée par les romains et l'ancien grec était la langue des vikings.
- $\log_{10}100 = 2$  équivaut au fait que l'hypoténuse est le côté le plus court d'un triangle rectangle.

9. Contrôler l'exatitute des affirmations suivantes:

- (a) Si  $\sqrt{64} = 8$ , alors Petit-Nobressard se trouve au Luxembourg.
- (b) Il est faux que si  $98764464 + 6935 - 7952 = 98\,763\,447$ , alors  $6 \cdot 13 = 76$ .

- (c) Si le perruche appartient à la famille des perroquets, alors  $(39 + 454) > 492,99$ .
- (d) Si les ours polaires mangent des pingouins, alors les chevaux sont capables de nager.
- (e) S'il est faux que  $3 + 3 = 5$ , alors  $3 \cdot 7 = 20$ .
- (f) Si le pape est une femme, alors  $8 \cdot 7 = 55 + 1$ .
- (g) Il est faux que si Madrid se trouve en France, alors  $5 \cdot 25 = 150$ .

# Solutions:

1. • Si  $2 + 3 = 8$ , alors l'or est un liquide.

$$\frac{\underbrace{2 + 3 = 8}_{0}}{\quad} \Big| \Rightarrow \Big| \frac{\underbrace{\text{l'or est un liquide}}_{0}}{\quad}$$

$$\quad \quad \quad \Big| \Rightarrow \Big| \quad \quad \quad$$

$$\quad \quad \quad \Big| 1 \Big| \quad \quad \quad$$

- Si  $3 + 2 = 7$ , alors  $4 + 4 = 8$ .

$$\frac{\underbrace{2 + 3 = 7}_{0}}{\quad} \Big| \Rightarrow \Big| \frac{\underbrace{4 + 4 = 8}_{1}}{\quad}$$

$$\quad \quad \quad \Big| \Rightarrow \Big| \quad \quad \quad$$

$$\quad \quad \quad \Big| 1 \Big| \quad \quad \quad$$

- Il est faux que si  $8 + 7 = 15$ , alors  $3 + 3 = 5$ .

$$\frac{\underbrace{8 + 7 = 15}_{1}}{\quad} \Big| \Rightarrow \Big| \frac{\underbrace{3 + 3 = 5}_{0}}{\quad}$$

$$\quad \quad \quad \Big| \Rightarrow \Big| \quad \quad \quad$$

$$\quad \quad \quad \Big| 0 \Big| \quad \quad \quad$$


---


$$8 + 7 = 15 \Rightarrow 3 + 3 = 5 : 1$$

- Si  $5 < 3$ , alors  $-3 < -5$

$$\frac{\underbrace{5 < 3}_{0}}{\quad} \Big| \Rightarrow \Big| \frac{\underbrace{-3 < -5}_{0}}{\quad}$$

$$\quad \quad \quad \Big| \Rightarrow \Big| \quad \quad \quad$$

$$\quad \quad \quad \Big| 1 \Big| \quad \quad \quad$$

- Si Paris est en France, alors  $2 \cdot 3 = 7$ .

$$\frac{\underbrace{\text{Paris est en France}}_{1}}{\quad} \Big| \Rightarrow \Big| \frac{\underbrace{2 \cdot 3 = 7}_{0}}{\quad}$$

$$\quad \quad \quad \Big| \Rightarrow \Big| \quad \quad \quad$$

$$\quad \quad \quad \Big| 0 \Big| \quad \quad \quad$$

- Paris se trouve en Angleterre et Londres se trouve en France.

$$\frac{\underbrace{\text{Paris se trouve en Angleterre}}_{0}}{\quad} \Big| \wedge \Big| \frac{\underbrace{\text{Londres se trouve en France}}_{0}}{\quad}$$

$$\quad \quad \quad \Big| \wedge \Big| \quad \quad \quad$$

$$\quad \quad \quad \Big| 0 \Big| \quad \quad \quad$$

- Paris se trouve en Angleterre ou Rome se trouve en Italie.

$$\frac{\underbrace{\text{Paris se trouve en Angleterre}}_{0}}{\quad} \Big| \vee \Big| \frac{\underbrace{\text{Rome se trouve en Italie}}_{1}}{\quad}$$

$$\quad \quad \quad \Big| \vee \Big| \quad \quad \quad$$

$$\quad \quad \quad \Big| 1 \Big| \quad \quad \quad$$

- Il est faux que  $1 + 1 = 3$  ou  $2 + 2 = 4$ .

$$\frac{\underbrace{1 + 1 = 3}_0 \quad | \quad \vee \quad | \quad \underbrace{2 + 2 = 4}_1}{\quad | \quad \vee \quad | \quad \quad | \quad 1 \quad |}{\hline (1 + 1 = 3) \vee (2 + 2 = 4) : 0}$$

- Si  $3 < -1$ , alors  $4 + 9 = 11$  ou bien  $8 \div 2 = 4$

$$\frac{\underbrace{3 < -1}_0 \quad | \quad \Rightarrow \quad | \quad \underbrace{(4 + 9 = 11)}_{(0)} \quad | \quad \Delta \quad | \quad \underbrace{8 \div 2 = 4}_1}{\quad | \quad \Rightarrow \quad | \quad \quad | \quad \Delta \quad | \quad \quad |}{\quad | \quad \Rightarrow \quad | \quad \quad | \quad 1 \quad | \quad \quad |}{\hline}$$

2.

- Paul est en bonne santé ou il est sportif.

$$\frac{\text{Paul est en bonne santé} \quad | \quad \text{ou} \quad | \quad \text{il est sportif} \quad || \quad \text{Négation} \quad | \quad \text{première loi de Morgan}}{p \quad | \quad \vee \quad | \quad q \quad || \quad (p \vee q) \quad | \quad = \bar{p} \wedge \bar{q}}{\hline}$$

Donc: Paul n'est ni en bonne santé ni sportif.

- Pierre est pauvre et étudiant.

$$\frac{\text{Pierre est pauvre} \quad | \quad \text{et} \quad | \quad \text{Pierre est étudiant} \quad || \quad \text{Négation} \quad | \quad \text{deuxième loi de Morgan}}{p \quad | \quad \wedge \quad | \quad q \quad || \quad (p \wedge q) \quad | \quad = \bar{p} \vee \bar{q}}{\hline}$$

Donc: Pierre n'est pas pauvre ou il n'est pas étudiant.

- Nicole est belle et intelligente.

$$\frac{\text{Nicole est belle} \quad | \quad \wedge \quad | \quad \text{Nicole est intelligente} \quad || \quad \text{Négation} \quad | \quad \text{deuxième loi de Morgan}}{p \quad | \quad \wedge \quad | \quad q \quad || \quad (p \wedge q) \quad | \quad = \bar{p} \vee \bar{q}}{\hline}$$

Donc: Nicole n'est pas belle ou elle n'est pas intelligente.

3. (\*) =  $(p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$

(\*\*) =  $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (p \wedge s) \vee (q \wedge r) \vee (q \wedge s)$

$p$	$q$	$r$	$s$	$p \vee q$	$r \vee s$	$(p \vee q) \wedge (r \vee s)$	$p \wedge r$	$p \wedge s$	$q \wedge r$	$q \wedge s$	(*)	(**)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

4.

$p$	$q$	$\bar{p}$	$(p \Rightarrow q)$	$(\bar{p} \vee q)$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{p} \vee q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Donc:  $\overline{(p \Rightarrow q)} = \overline{\bar{p} \vee q} = \bar{\bar{p}} \wedge \bar{q} = p \wedge \bar{q}$

5. Posons:

- Propositions de Pierre:  
 [Je fais mes études au collège Jean Monnet] =  $p_1$   
 [Jean est à l'école des Nouettes] =  $q_1$
- Propositions de Jean:  
 [Je fais mes études au collège Jean Monnet] =  $p_2$   
 [Pierre est au lycée Savary] =  $q_2$
- Propositions de Léon:  
 [Je fais mes études au collège Jean Monnet] =  $p_3$   
 [Pierre est à l'école des Nouettes] =  $q_3$

$p_1$	$p_2$	$p_3$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$(p_1 \triangle q_1)$	$(p_2 \triangle q_2)$	$(p_3 \triangle q_3)$	$(q_1 \triangle q_3)$	$(q_2 \triangle q_3)$	$(***)$
1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0

$$(***) = (p_1 \triangle q_1) \wedge (p_2 \triangle q_2) \wedge (p_3 \triangle q_3) \wedge (q_1 \triangle q_3) \wedge (q_2 \triangle q_3)$$

**Conclusion:**  $p_3, q_1$  et  $q_2$  sont vraies.

Donc: Léon fait ses études au collège Jean Monnet, Jean est à l'école des Nouettes et Pierre est au lycée Savary.

6. Soit  $p$  la proposition: 'Sophie est 2e'.  
 Soit  $q$  la proposition: 'Isabelle est 3e'.  
 Soit  $r$  la proposition: 'Sophie est 1re'.  
 Soit  $s$  la proposition: 'Caroline est 2e'.  
 Soit  $t$  la proposition: 'Nadine est 2e'.  
 Soit  $u$  la proposition: 'Isabelle est 4e'.

Il faut que la proposition  $(p \triangle q)$  et  $(r \triangle s)$  et  $(t \triangle u)$  soit vraie.

[cf. ni deux personnes peuvent avoir la même place, ni quelqu'un a dit deux phrases fausses ou vraies]

$p$	$q$	$r$	$s$	$t$	$u$	$p \triangle r$	$q \triangle u$	$(p \triangle r) \wedge (q \triangle u)$	$p \triangle s$	$(p \triangle s) \triangle t$	$*$
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0

$$* = [(p \triangle r) \wedge (q \triangle u)] \wedge [(p \triangle s) \triangle t]$$

**Conclusion:** La seule possibilité qui convient est:  $q$  et  $r$  et  $t$  sont vraies.

Le classement est donc le suivant: 1. Sophie 2. Nadine 3. Isabelle 4. Caroline

7. Soient  $p =$  "je suis le premier" et  $q =$  "je suis le dernier"

Affirmations:	Alain	Bob	Christian	Denis	Possibilité
	$(\bar{p} \wedge \bar{q}) = (p \vee q)$	$\bar{p}$	$p$	$q$	/
Si la réponse d'Alain est fausse:	$(p \vee q) = (p \vee q)$	$\bar{p}$	$p$	$q$	imp. <sup>1</sup>
Si la réponse de Bob est fausse:	$(\bar{p} \wedge \bar{q})$	$\bar{\bar{p}} = p$	$p$	$q$	imp. <sup>2</sup>
Si la réponse de Christian est fausse:	$(\bar{p} \wedge \bar{q})$	$\bar{p}$	$\bar{p}$	$q$	imp. <sup>3</sup>
Si la réponse de Denis est fausse:	$(\bar{p} \wedge \bar{q})$	$\bar{p}$	$p$	$\bar{q}$	seule possibilité

<sup>1</sup> : car Alain ne peut être ni premier (car Christian l'est) ni dernier (car Denis l'est)

<sup>2</sup> : car Bob et Christian ne peuvent pas être premier en même temps

<sup>3</sup> : car personne ne serait premier

**Conclusion:** Christian était le premier et Denis a donné une réponse fausse.

8.

•	$\underbrace{\text{Petit-Nobressart se trouve dans la commune de Ell}}_1$	$\Rightarrow$	$\underbrace{\text{le chat n'est pas un mammifère}}_0$
		$\Rightarrow$	$0$

•	$\underbrace{\text{La chauve-souris est un oiseau}}_{(0)}$	$\vee$	$\underbrace{\text{les vampires existent}}_{(0)}$	$\Rightarrow$	$\underbrace{\frac{27 \cdot 81}{90} = 24,3)}_1$
		$\vee$		$\Rightarrow$	$1$
		$0$		$\Rightarrow$	$1$



$$\bullet \frac{\underbrace{\text{Les éléphants savent nager}}_1}{\underbrace{\quad\quad\quad}_0} \mid \begin{array}{c} \Delta \\ \Delta \\ 0 \end{array} \mid \underbrace{\pi \leq 4}_1$$

$$\bullet \frac{\underbrace{\text{Il est possible de lécher son propre coude}}_0}{\underbrace{\quad\quad\quad}_1} \mid \Rightarrow \mid \frac{\underbrace{\frac{250}{143} \geq 1.8}}_0}{\underbrace{\quad\quad\quad}_0}$$

Donc: Il est faux que s'il est possible de lécher son propre coude,  $\frac{250}{143} \geq 1.8$ : proposition fausse

$$\bullet \frac{\underbrace{\text{Le latin était la langue parlée par les romains}}_1}{\underbrace{\quad\quad\quad}_0} \mid \wedge \mid \frac{\underbrace{\text{l'ancien grec était la langue des vikings}}_0}{\underbrace{\quad\quad\quad}_0}$$

$$\bullet \frac{\underbrace{\log_{10} 100 = 2}_1}{\underbrace{\quad\quad\quad}_0} \mid \Leftrightarrow \mid \frac{\underbrace{\text{l'hypoténuse est le côté le plus court d'un triangle rectangle}}_0}{\underbrace{\quad\quad\quad}_0}$$

9.

$$(a) \frac{\text{Si } \underbrace{\sqrt{64} = 8}_1}{\underbrace{\quad\quad\quad}_1} \mid \text{alors } \mid \frac{\underbrace{\text{Petit-Nobressard se trouve au Luxembourg}}_1}{\underbrace{\quad\quad\quad}_1}$$

$$(b) \frac{\text{Si } \underbrace{98764464 + 6935 - 7952 = 98\,763\,447}_1}{\underbrace{\quad\quad\quad}_1} \mid \text{alors } \mid \frac{\underbrace{\overline{6 \cdot 13 = 76}}_1}{\underbrace{\quad\quad\quad}_1}$$

$$(c) \frac{\text{Si } \underbrace{\text{le perruche appartient à la famille des perroquets}}_1}{\underbrace{\quad\quad\quad}_1} \mid \text{alors } \mid \frac{\underbrace{(39 + 454) > 492,99}_1}{\underbrace{\quad\quad\quad}_1}$$

$$(d) \frac{\text{Si } \underbrace{\text{les ours polaires mangent des pingouins}}_1}{\underbrace{\quad\quad\quad}_1} \mid \text{alors } \mid \frac{\underbrace{\text{les chevaux sont capables de nager}}_1}{\underbrace{\quad\quad\quad}_1}$$

$$(e) \begin{array}{c|c|c|c} \text{Si} & \underbrace{3+3=5} & \text{alors} & \underbrace{3 \cdot 7 = 20} \\ \hline & 1 & \Rightarrow & 0 \\ & & 0 & \end{array}$$

$$(f) \begin{array}{c|c|c|c} \text{Si} & \underbrace{\text{le pape est une femme}} & \text{alors} & \underbrace{8 \cdot 7 = 55 + 1} \\ \hline & 0 & \Rightarrow & 1 \\ & & 1 & \end{array}$$

$$(g) \begin{array}{c|c|c|c} \text{Si} & \underbrace{\text{Madrid se trouve en France}} & \text{alors} & \underbrace{5 \cdot 25 = 150} \\ \hline & 0 & \Rightarrow & 0 \\ & & 1 & \end{array}$$

Donc: Il est faux que si Madrid se trouve en France, alors  $5 \cdot 25 = 150$  : proposition fausse

**Saisie et mise en pages des solutions:**

**Bob Heymans, IIE B 2**

**Bob Weber, IIE B 2**

**Ailin Zhang, IIE B 2**

**Alain Klein, IIE C 2**

**(LCD, 2007-08)**