Exercices sur les matrices

1. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

   (b) Vérifier que ${}^t\left(A^{-1}\right) = \left({}^tA\right)^{-1}$ et ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.

2. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   (a) Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

   (b) Calculer B^2 , B^3, puis par récurrence B^n , $n \in \mathbb{N}$.

   (c) Résoudre l'équation matricielle $A \cdot X \cdot A = A \cdot B^5 - C \cdot A + A^2$.

3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer A^2 et A^3.

   (b) Calculer la matrice $S = A^3 + a \cdot A^2 + b \cdot A + c \cdot I_3$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   (c) Pour quelles valeurs de a, b, c la matrice S est-elle égale à la matrice nulle ?

4. Les matrices suivantes sont-elles inversibles?
   Si oui, déterminer leur inverse.
   $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$,
   $D = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$, a, b, c sont des réels non nuls

5. Pour quelles valeurs de m les matrices suivantes sont-elles inversibles?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 2 & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m & 3 & 0 \\ -m & 0 & m \\ 1 & 2 & -m \end{pmatrix}$$

6. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   (a) Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

   (b) Résoudre l'équation matricielle $A \cdot X \cdot A = B \cdot A - A^2$.

7. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Démontrer que les matrices A et B sont inversibles et calculer A^{-1} et B^{-1}.

   (b) Résoudre l'équation matricielle $B \cdot X \cdot A = A + B \cdot A$.

8. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

   (b) Calculer B^2, B^3 , puis par récurrence $B^n,\ n \in \mathbb{N}^*$.

   (c) Résoudre l'équation matricielle $A \cdot X \cdot A = A \cdot B^5 - A^2$.

9. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

   (a) Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

   (b) Résoudre l'équation matricielle $A \cdot X \cdot A = A \cdot B - A^2$.

Exercices sur les matrices : solutions

1.

(a) $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$;donc A est inversible

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ 10 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

(b) $^t\left(A^{-1}\right) = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 10 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

$$\left(^tA\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 10 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Donc: $^t\left(A^{-1}\right) = \left(^tA\right)^{-1}$

$$^t(A \cdot B) = {}^t\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= {}^t\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$^tB \cdot {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc: $^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$

2.

(a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$;donc A est inversible

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \quad n \in \mathbb{N}$

(c) $A \cdot X \cdot A = A \cdot B^5 - C \cdot A + A^2$

$\Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A = A^{-1} \cdot A \cdot B^5 - A^{-1} \cdot C \cdot A + A^{-1} \cdot A^2$

$\Leftrightarrow X \cdot A = B^5 - A^{-1} \cdot C \cdot A + A$

$\Leftrightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B^5 \cdot A^{-1} - A^{-1} \cdot C \cdot A \cdot A^{-1} + A \cdot A^{-1}$

$\Leftrightarrow X = B^5 \cdot A^{-1} - A^{-1} \cdot C + I_3$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$- \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -16 & 16 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -8 & -1 & -11 \\ -18 & -12 & -16 \\ 7 & 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -7 & 17 & 11 \\ 18 & 13 & 16 \\ -23 & 14 & -7 \end{pmatrix}$

3.

(a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $S = A^3 + a \cdot A^2 + b \cdot A + c \cdot I_3$

$$\Leftrightarrow S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow S = \begin{pmatrix} c+1 & a & b+3 \\ b+3 & 3a+c+1 & a+3b+9 \\ a & b+3 & 3a+c+1 \end{pmatrix}$$

(c) S est égale à la matrice nulle

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c+1=0 \\ b+3=0 \\ a=0 \\ 3a+c+1=0 \\ a+3b+9=0 \\ 3a+c+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-3 \\ c=-1 \end{cases}$$

4. $detA = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$;donc A est inversible

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$\det B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$;donc B est inversible

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det C = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$;donc C est inversible

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -15 & -12 \\ -2 & 3 & 2 \\ -8 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\det D = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 2abc \neq 0 \text{;donc } D \text{ est inversible}$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{2ab} & \frac{1}{2a} & \frac{1}{2b} \\ \frac{1}{2a} & -\frac{b}{2ac} & \frac{1}{2c} \\ \frac{1}{2b} & \frac{1}{2c} & -\frac{a}{2bc} \end{pmatrix}$$

5. $\det A = \begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 2 & m \end{vmatrix} = -m$

   si $m \neq 0, A$ **est inversible**

   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & m & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 2 & m \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{m^2-4}{m} & \frac{2}{m} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{-m^2+2}{m} & -\frac{1}{m} \end{pmatrix}$$

   $$\det\ B = \begin{vmatrix} m & 3 & 0 \\ -m & 0 & m \\ 1 & 2 & -m \end{vmatrix} = 3m - 5m^2 = -m\,(5m-3)$$

   si $m \neq 0$ **et** $m \neq \dfrac{3}{5}, B$ **est inversible**

   $$B^{-1} = \begin{pmatrix} m & 3 & 0 \\ -m & 0 & m \\ 1 & 2 & -m \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5m-3} & -\frac{3}{5m-3} & -\frac{3}{5m-3} \\ \frac{m-1}{5m-3} & \frac{m}{5m-3} & \frac{m}{5m-3} \\ \frac{2}{5m-3} & \frac{2m-3}{-3m+5m^2} & -\frac{3}{5m-3} \end{pmatrix}$$

6.

   (a) $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 27 \neq 0; A$ est donc inversible

   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

   (b) $A \cdot X \cdot A = B \cdot A - A^2$
   $\Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A = A^{-1} \cdot B \cdot A - A^{-1} \cdot A^2$
   $\Leftrightarrow X \cdot A = A^{-1} \cdot B \cdot A - A$
   $\Leftrightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot B \cdot A \cdot A^{-1} - A \cdot A^{-1}$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B - I_3$$
$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

7.

(a) $detA = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$;donc A est inversible

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 \\ -5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$;donc B est inversible

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

(b) $B \cdot X \cdot A = A + B \cdot A$
$$\Leftrightarrow B^{-1} \cdot B \cdot X \cdot A = B^{-1} \cdot A + B^{-1} \cdot B \cdot A$$
$$\Leftrightarrow X \cdot A = B^{-1} \cdot A + A$$
$$\Leftrightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} + A \cdot A^{-1}$$
$$\Leftrightarrow X = B^{-1} + I_3$$
$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{11}{10} \end{pmatrix}$$

8.

(a) $detA = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$;donc A est inversible

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$

$B^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}^*$

(c) $A \cdot X \cdot A = A \cdot B^5 - A^2$

$\Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A = A^{-1} \cdot A \cdot B^5 - A^{-1} \cdot A^2$

$\Leftrightarrow X \cdot A = B^5 - A$

$\Leftrightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B^5 \cdot A^{-1} - A \cdot A^{-1}$

$\Leftrightarrow X = B^5 \cdot A^{-1} - I_3$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \\ 81 & 81 & 81 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -162 & -81 & -162 \\ -162 & -81 & -162 \\ -162 & -81 & -162 \end{pmatrix}$

9.

(a) $detA = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$;donc A est inversible

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $A \cdot X \cdot A = A \cdot B - A^2$

$\Leftrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot A = A^{-1} \cdot A \cdot B - A^{-1} \cdot A^2$

$\Leftrightarrow X \cdot A = B - A$

$\Leftrightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} - A \cdot A^{-1}$

$\Leftrightarrow X = B \cdot A^{-1} - I_3$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -19 & 1 & 13 \\ 1 & -3 & 1 \\ 11 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Mise en pages des énoncés: Robert CUNY (I^ere^ C 5, LCD 2004)
Rédaction et mise en pages des solutions:
Robert CUNY (I^ere^ C 5, LCD 2004), Geneviève Harles