Probabilités

Exercices

1. Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables au toucher.

   Un "essai" consiste à tirer simultanément 3 boules de l'urne. Lors d'un essai, un joueur gagne 1 point s'il a obtenu au moins 2 boules rouges.

   (a) Calculer la probabilité p d'obtenir 1 point au cours d'un essai.

   (b) Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules rouges obtenues au cours d'un essai. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Pierre possède un jeu électronique. Une partie est un duel entre Pierre et un monstre choisi parmi deux au hasard par la machine.

   On pose:

   A l'événement "Pierre combat le monstre M_1"
   B l'événement "Pierre combat le monstre M_2"

   Les deux monstres sont de forces inégales.

   On admet que:

   si Pierre combat M_1,la probabilité qu'il gagne la partie est $\dfrac{1}{3}$
   si Pierre combat M_2,la probabilité qu'il gagne la partie est $\dfrac{1}{4}$

   (a) Pierre joue une partie. Quelle est la probabilité qu'il gagne?

   (b) Sachant qu'il l'a gagné, quelle est la probabilité qu'il ait combattu M_1?

Solutions

1. (a) Le résultat d'un essai est une combinaison de 3 boules choisies parmi les 10 de l'urne. On regroupe ces résultats dans l'univers Ω :
$Card\ \Omega = C_{10}^{3} = 120$.
Posons A l'événement "obtenir un point au cours d'un essai" .
Alors $A = A_2 \cap A_3$
où A_2 est l'événement "tirer exactement deux boules rouges au cours d'un essai"
et
A_3 est l'événement "tirer exactement trois boules rouges au cours d'un essai"

$Card\ A_2 = C_4^2 \cdot C_6^1 = 36$.
Les boules étant indiscernables au toucher, les tirages sont équiprobables.
D'où: $p(A_2) = \dfrac{Card\ A_2}{Card\ \Omega} = \dfrac{3}{10}$.
De même:
$Card\ A_3 = C_4^3 = 4$, d'où: $p(A_3) = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{3}$.
$p = p(A) = p(A_2) + p(A_3)$, car A_2 et A_3 sont incompatibles.
D'où: $p = \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{30} = \dfrac{1}{3}$.

(b) X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3.
On connaît :
$A_3 = (X = 3)$ d'où $p(X = 3) = p(A_3) = \dfrac{1}{30}$
$A_2 = (X = 2)$ d'où $p(X = 2) = \dfrac{3}{10}$
On a aussi:
$p(X = 1) = \dfrac{C_4^1 \cdot C_6^2}{120} = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}$
et
$p(X = 0) = \dfrac{C_4^0 \cdot C_6^3}{120} = \dfrac{60}{120} = \dfrac{1}{2}$.

On peut résumer la loi de X dans le tableau suivant:

x	0	1	2	3
$p(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

(remarquer que $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{30} = 1$)

2.

(a) A et B forment une partition de l'univers des possibles.
D'après la formule des probabilités totales: si l'on pose G l'événement: "Pierre gagne la partie", $p(G) = p(G/A) \cdot p(A) + p(G/B) \cdot p(B)$.
Or $p(G/A)$ est la probabilité que Pierre gagne, sachant qu'il combat M_1.
D'après l'énoncé: $p(G/A) = \dfrac{1}{3}$.
De même: $p(G/B) = \dfrac{1}{4}$.
D'après le texte, la machine choisit au hasard M_1 et M_2, c'est-à-dire que $p(A) = p(B) = \dfrac{1}{2}$.
D'où: $p(G) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{7}{24}$.

(b) La probabilité que Pierre ait combattu M_1, sachant qu'il a gagné, est $p(A/G)$.
Par définition: $p(A/G) = \dfrac{p(A \cap G)}{p(G)}$;
or $pA \cap G = p(G/A) \cdot p(A)$.
Finalement $p(A/G) = \dfrac{p(G/A) \cdot p(A)}{p(G)} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{24}} = \dfrac{4}{7}$.

(Saisie et mise en pages: Christophe THEIS, IIe B 4, LCD)