Vecteurs

Exercices

1. On donne les points A, B, C, D, E, F, G du plan.

   Calculer les sommes:

   (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

   (b) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AD}$

2. Soit un parallélogramme $ABCD$.

   Démontrer que:

   (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 0$

   (b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$

   (c) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$

   (d) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AD}$

3. A, B, C et D étant quatre points du plan, démontrer que:
   $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

4. Soit un triangle ABC et soient A', B', C' les milieux respectivement des côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$.

   Etablir l'égalité: $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'}$

5. Soit un triangle ABC et sur le segment $[BC]$ les points D et E tels que: $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}$

   Démontrer que: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

6. On donne les points A, B, C, D, E, F du plan P.

   Calculer les sommes:

   (a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{CB}$

(b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CA}$

(c) $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{EC} - \left(-\overrightarrow{CD}\right) - \overrightarrow{ED} + \left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB}$

7. Soit $ABCD$ un parallélogramme.

   (a) Simplifier

      i. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

      ii. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA}$

   (b) Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$

Corrigé

1.

   (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$

   (b) $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$

2.

   (a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ puisque $ABCD$ est un parallélogramme.
   $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DD} = \overrightarrow{0}$

   (b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ puisque $ADCB$ est un parallélogramme et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
   donc $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$

   (c) $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ puisque $DABC$ est un parallélogramme.
   $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$

   (d) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ puisque $BCDA$ est un parallélogramme.
   $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

3. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)$
$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}\right)$
$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{0}$
$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

4. $A'=mil\,[BC]$
$B'=mil\,[AC]$
$C'=mil\,[AB]$
Puisque $A'=mil\,[BC]$ et $C'=mil\,[AB]$, on a:
$(A'C')\parallel(AC)$ donc $(A'C')\parallel(AB')$
(Théorème des milieux ou réciproque du théorème de Thalès)
De même $(A'B')\parallel(AC')$
$\left\{\begin{array}{l}(AB')\parallel(A'C')\\(A'B')\parallel(AC')\end{array}\right. \Longleftrightarrow AC'A'B'$ est un parallélogramme
$AC'A'B'$ est un parallélogramme $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{C'A'}$
Donc $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{C'A'}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{C'A'}=\overrightarrow{AA'}$

5. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$
$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}\right)$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}\right)$
Or, puisque $\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}$ et D et E des points de $[BC]$, on a:
$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{EC}\Longleftrightarrow BDCE$ est un parallélogramme $\Longleftrightarrow mil\,[BC]=mil\,[DF]$
donc:
$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CE}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EE}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{0}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

6.

(a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{DC}\right)+\left(-\overrightarrow{FE}\right)+\overrightarrow{DE}+\left(-\overrightarrow{CB}\right)$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}$

(b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FG}-\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{CA}$
$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}\right)=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}$

(c) $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{EC}-\left(-\overrightarrow{CD}\right)-\overrightarrow{ED}+\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}$
$=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BD}$
$=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EE}=\overrightarrow{0}$

7.

(a)

i. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$
$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$
$=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}\right)+\overrightarrow{AB}$
$=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}\right)+\overrightarrow{AB}$
$=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$

ii. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DA}$
$=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$
$=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}$
$=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$

(b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AD}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}(*)$
or: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
D'où:$(*)$:
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$
$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}$
$=\overrightarrow{0}$
Donc: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}$

(**Saisie des exercices et du corrigé**: Christophe THEIS, II^e B 4, LCD)